

FREE YOUR MIND

THE MATRIX

Matrices et ALs

V W des K -ev de dim d, d'
 $\overset{U}{B}$ $\overset{U'}{B'}$ des bases

On a construit des isomorphismes

$$CL_B: K^d \xrightarrow{\sim} V$$

$$CL_{B'}: K^{d'} \xrightarrow{\sim} W$$

On a également construit une base

$B_{B', B}$ de $\text{Hom}(V, W)$
(formée d'AL élémentaires)
 $E_{ij} \quad i \leq d', j \leq d$)

et donc un isomorphisme

$$CL_{B_{B', B}} : (K^{d'})^d \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$$
$$(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} \mapsto \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^d m_{ij} E_{ij}$$

DÉFINITION 7.1. L'espace vectoriel $(K^{d'})^d$ s'appelle l'espace des matrices de dimension $d' \times d$ à coefficients dans K et est noté

$$M_{d' \times d}(K) = \{(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}, m_{ij} \in K\}.$$

Un élément de $M_{d' \times d}(K)$ est appelé matrice de dimensions $d' \times d$ ou juste une matrice $d' \times d$.

$$M = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} = \begin{matrix} i \\ \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \right. \end{matrix}.$$

 **THE WARNING**  la première coordonnée i donne la ligne à laquelle appartient m_{ij} et la 2^{ème} coordonnée donne la colonne à laquelle appartient m_{ij}

DÉFINITION 7.2. Soient $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \subset \text{Hom}(V, W)$ la base de $\text{Hom}(V, W)$ associée. L'application réciproque $CL_{\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}}^{-1}$ sera également notée

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} : \text{Hom}(V, W) \mapsto M_{d' \times d}(K).$$

Explicitement, si on la décompose $\varphi = \sum_{i \leq d'} \sum_{j \leq d} m_{ij}(\varphi) \mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i \leq d', j \leq d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$ est appelée matrice associée à φ dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leq j \leq d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i \leq d'}$ est l'ensemble des coordonnées de l'image $\varphi(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$: ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d'} m_{ij}(\varphi) \mathbf{f}_i.$$

Example: $V = k^3$ $W = k^2$

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, \quad 1 + 3z)$$

$$\text{mat}_{B_2, B_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Examples

Matrice nulle

$$O_{d' \times d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\} d' \\ \underbrace{\hspace{10em}}_d$$

Matrices elementaires, $E_{ij} = \text{mat}_{B,B}(\varepsilon_{ij})$

$$m_{ij}(E_{ij}) = 1 \quad i$$

$$m_{i'j'}(E_{ij}) = 0 \\ \text{is } (i',j') \neq (i,j)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 d

Carrières $\dim W = \dim V = d$

les matrices sont $d \times d$ et sont
carrées

Cas fondamental $W = V$

$$\text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$$

Identité / Scalaire

$$\begin{array}{l} \text{Id}_V : V \longrightarrow V \\ v \longrightarrow v \end{array} \quad B = B'$$

Dans ce cas

$$\text{mat}_{BB}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \textcircled{0} & \\ & \textcircled{0} & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =: \text{Id}_d$$

⚡ THE
WARNING

⚡ $S_1 \quad B' \neq B$

$$\text{mat}_{B'B}(\text{Id}_V) \neq \text{Id}_d$$

Multiplication par les scalaires:

$$\lambda \in K : [\times \lambda] : v \in V \longrightarrow \lambda \cdot v \in V$$

$$B' = B$$

$$\text{mat}_{BB}([\times \lambda]) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \bigcirc & \\ & & \diagdown & \\ \bigcirc & & & \lambda \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 7.3. Soient $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases. Soit

$$v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + x_d \cdot \mathbf{e}_d \in V$$

un vecteur décompose dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrices

$$\text{Col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \text{Lig}_{\mathcal{B}}(v) = (x_1 \quad \cdots \quad x_d)$$

sont appelées respectivement

- la matrice colonne associée à v dans la base $\mathcal{B}$,
- La matrice ligne associée à v dans la base $\mathcal{B}$,

Ces applications sont des isomorphismes entre V et $\text{Col}_d(K)$ et $\text{Lig}_d(K)$.

Structure des Espaces de matrices

Addition et $\times$ par les scalaires

$M_{d' \times d}(K)$ est un K -ev où l'addition est donnée par

$$m = (m_{ij})_{ij} \quad n = (n_{ij})_{ij} \in M_{d' \times d}(K)$$

$$m+n := (m_{ij} + n_{ij})_{ij}$$

$$\lambda \in K \quad \lambda.m = (\lambda m_{ij})_{ij}$$

Ces Lois sur $M_{d' \times d}(K)$ sont celles
telles que

$\text{mat}_{B'B} : \text{Hom}(V, W) \longrightarrow M_{d' \times d}(K)$
soit un isom de K -ev.

DÉFINITION 7.5. Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, on définit le produit des matrices M et N comme étant la matrice

$$L := M.N \in M_{d'' \times d}(K)$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d} \in M_{d'' \times d}(K) \text{ et } l_{ik} := \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

Soient $d, d', d'' \geq 1$, on a donc défini une application "produit de matrices"

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \bullet \bullet : M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) &\mapsto M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) &\mapsto L = M.N \end{aligned}$$

Pour définir le produit de
2 matrices, il faut que
la 2^{ème} dim de la 1^{ère} matrice
soit = à la 1^{ère} dim de la 2^{ème} matrice

W THE
WARNING

$$\begin{array}{c}
 \text{N : } d' \text{ lignes } d \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 n_{11} & \dots & n_{1k} & \dots & n_{1d} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 n_{j1} & \dots & n_{jk} & \dots & n_{jd} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 n_{d'1} & \dots & n_{d'k} & \dots & n_{d'd}
 \end{array} \right) = N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{M : } d'' \text{ lignes } d' \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1d'} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{id'} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 m_{d''1} & \dots & m_{d''j} & \dots & m_{d''d'}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{L = M} \times \text{N : } d'' \text{ lignes } d \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 l_{11} & \dots & l_{1k} & \dots & l_{1d} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 l_{i1} & \dots & l_{ik} & \dots & l_{id} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 l_{d''1} & \dots & l_{d''k} & \dots & l_{d''d}
 \end{array} \right) = L
 \end{array}$$

The diagram illustrates the matrix multiplication $L = M \times N$. The matrix N (top right) has dimensions $d' \times d$. The matrix M (bottom left) has dimensions $d'' \times d'$. The resulting matrix L (bottom right) has dimensions $d'' \times d$. The element l_{ik} in L is highlighted in red. Handwritten annotations show the calculation of l_{ik} as the dot product of the i -th row of M and the k -th column of N :

$$m_{i1} \cdot n_{1k} + m_{i2} \cdot n_{2k} + \dots + m_{id'} \cdot n_{d'k}$$
 Arrows indicate the mapping from the i -th row of M and the k -th column of N to the l_{ik} element in L .

Example: $\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$

$$\psi(s, t) = (3s + t, s + t)$$

$$\psi \circ \varphi: (x, y, z) \longrightarrow$$

$$(3(2x + 4y) + y + 3z, 2x + 5y + 3z)$$

$$= (6x + 13y + 3z, 2x + 5y + 3z)$$

$$N = \text{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \text{mat}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \times N = \text{mat}(\psi \circ \varphi)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Images de Vecteurs

PROPOSITION 7.1. Soit $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases, $v \in V$ un vecteur de coordonnées $(x_j)_{j \leq d}$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie. $v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \cdot \mathbf{e}_d$) et $(y_i)_{i \leq d'}$ les coordonnées de $\varphi(v)$ dans la base $\mathcal{B}'$ (ie. $\varphi(v) = y_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + y_{d'} \cdot \mathbf{f}_{d'}$). On associe à v et $\varphi(v)$ leurs matrices colonnes (de hauteurs d et $d' =$

$$\text{Col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \text{Col}_{\mathcal{B}'}(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix}$$

alors on a la relation

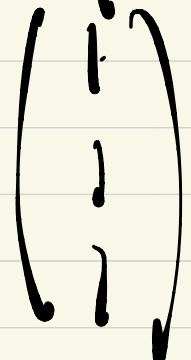
$$\text{Col}_{\mathcal{B}'}(\varphi(v)) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{Col}_{\mathcal{B}}(v).$$

Autrement dit si $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$, on a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Example: $\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$

$v = (1, 1, 1)$ $\varphi(1, 1, 1) = (6, 4)$



$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Example: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$\varphi: V \rightarrow V \quad P(x) \mapsto xP'(x) - P(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x^2 + x + 1) &= x \cdot 2 - (x^2 + x + 1) \\ &= -x^2 + x - 1\end{aligned}$$

$$B = B' = \{1, x, x^2\}$$

$$\varphi(1) = -1 \quad \varphi(x) = -x \quad \varphi(x^2) = -x^2 + 2x$$

$$\text{mat}_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(1+x+x^2) \\ &= -x^2 + x - 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices élémentaires

PROPOSITION 7.2. Soit $E_{ij} \in M_{d'' \times d'}$ et $E_{j'k} \in M_{d' \times d}$ alors

$$E_{ij} \cdot E_{j'k} = \delta_{j=j'} E_{ik}.$$

Preuve: E_{ij} représente ε_{ij} dans des

$U \quad V \quad W$

$\{e_k\} \{f_{j'}\} \{g_i\}$

$$\varepsilon_{ij} \circ \varepsilon_{j'k}(e_{k'}) = \varepsilon_{ij}(\overset{*}{e}_k(e_{k'})_{j'})$$

$$= e_k^*(e_{k'}) \sum_{\mathbf{d}} (\delta_{\mathbf{d}\mathbf{d}'})$$

$$= \delta_{k=k'} \delta_{\mathbf{d}}^*(\delta_{\mathbf{d}'}) g_i$$

$$= \delta_{k=k'} \delta_{\mathbf{d}=\mathbf{d}'} g_i = \delta_{\mathbf{d}=\mathbf{d}'} \delta_{k=k'} g_i$$

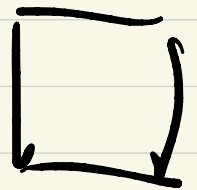
$$= \delta_{\mathbf{d}=\mathbf{d}'} \sum_{\mathbf{k}} (e_{\mathbf{k}'})$$

$$= (\delta_{\mathbf{d}=\mathbf{d}'} \sum_{\mathbf{k}}) (e_{\mathbf{k}'})$$

On a $\varepsilon_{i,d} \circ \varepsilon_{d',k} = \delta_{d=d'} \varepsilon_{ik}$

en représentant aux matrices associées

$$E_{i,d} \times E_{d',k} = \delta_{d=d'} E_{ik}$$



$d'' = d' = d: M_{d \times d}(K) \times M_{d \times d}(K) \hookrightarrow M_{d \times d}(K)$

la multiplication des matrices est
une loi interne

C'est le seul cas où on obtient
une multiplication interne.

$\Leftrightarrow$ Composition dans $\text{End}(V)$

Cas des Isomorphismes

$$\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$$

$$\varphi^{-1}: W \xrightarrow{\sim} V$$

$$B = \text{base de } V \quad B' = \text{base de } W$$

$$\text{mat}_{B'B}(\varphi), \quad \text{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) \in M_d(K)$$

$$\text{On a} \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_V \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_W$$

On a alors que

$$\text{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) \times \text{mat}_{B'B}(\varphi) = \text{mat}_{BB}(\text{Id}_V) \\ = I_d$$

$$\text{mat}_{B'B}(\varphi) \times \text{mat}_{BB'}(\varphi^{-1}) = \text{mat}_{B'B'}(\varphi \circ \varphi^{-1}) \\ = \text{mat}_{B'B'}(\text{Id}_W) \\ = I_d$$

PROPOSITION 7.2. soit $\varphi : V \simeq W$ un isomorphisme lineaire et $\varphi^{-1} : W \mapsto V$ la reciproque. On a les relations

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi^{-1}).\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = \text{Id}_d,$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi).\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi^{-1}) = \text{Id}_d.$$

En particulier si $V = W$ et $\varphi = \text{Id}_V$ est l'identite on a

$$(7.2.3) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_V).\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_V) = \text{Id}_d.$$

$$\text{Si } M = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \quad M' = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi^{-1})$$

$$\text{alors } M' \times M = M \times M' = \text{Id}$$

M et M' sont inverses l'une de l'autre dans $M_d(K)$.

THÉORÈME 7.1 (Propriétés fonctionnelles du produit de matrices). Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M_{d'' \times d'}(K)$, $M_{d' \times d}(K)$, $M_{d'' \times d}(K)$ les espaces de matrices correspondants.

L'application "produit de matrices"

$$\begin{array}{ccc} M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) & \mapsto & M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) & \mapsto & M.N \end{array}$$

a les propriétés suivantes

(1) Distributive à gauche: pour $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$,

$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$

(2) Distributive à droite: pour $\lambda \in K$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d' \times d}(K)$,

$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$

(3) Neutralité de l'identité: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\text{Id}_{d''}.M = M, \quad M.\text{Id}_{d'} = M$$

(4) La matrice nulle est absorbante: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\underline{0}_{d''d''}.M = \underline{0}_{d''d''}, \quad M.\underline{0}_{d'd} = \underline{0}_{d''d}.$$

(5) Associativité: Soit $d''' \geq 1$ et $L \in M_{d''' \times d''}(K)$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$ alors

$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d''' \times d}(K)$$

Preuve

THÉORÈME 7.2. Soit U, V, W des espaces vectoriels de dimensions d, d', d'' et $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases. Soient des applications lineaires

$$\varphi : U \mapsto V, \quad \psi : V \mapsto W.$$

On note les coefficients des matrices de φ, ψ et $\psi \circ \varphi$ dans les bases adequates par

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) &= (n_{jk})_{jk}, & \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\psi) &= (m_{ij})_{ij} \\ \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) &= (l_{ik})_{ik} \end{aligned}$$

alors on a

$$(7.2.2) \quad \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\psi) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$$

Autrement dit on a

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1d} \\ l_{21} & \cdots & l_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{d''1} & \cdots & l_{d''d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d'} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d''1} & m_{d''2} & \cdots & m_{d''d'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1d} \\ n_{21} & \cdots & n_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ n_{d'1} & \cdots & n_{d'd} \end{pmatrix}$$

THÉORÈME (Propriétés fonctionnelles de la composition des applications linéaires). Soient U, V, W, Z des espaces vectoriels de dimensions finies.

L'application "composition"

$$\bullet \circ \bullet : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(U, V) & \mapsto & \text{Hom}_K(U, W) \\ (\psi, \varphi) & \mapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

a les propriétés suivantes

(1) Distributive à gauche: pour $\lambda \in K$, $\psi, \psi' \in \text{Hom}_K(V, W)$, $\varphi \in \text{Hom}_K(U, V)$,

$$(\lambda.\psi + \psi') \circ \varphi = \lambda.\psi \circ \varphi + \psi' \circ \varphi.$$

(2) Distributive à droite: pour $\lambda \in K$, $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$, $\varphi, \varphi' \in \text{Hom}_K(U, V)$,

$$\psi \circ (\lambda.\varphi + \varphi') = \lambda.\psi \circ \varphi + \psi \circ \varphi'.$$

(3) Neutralité de l'identité: pour $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$,

$$\text{Id}_W \circ \psi = \psi, \quad \psi \circ \text{Id}_V = \psi.$$

(4) L'application linéaire nulle est absorbante: soit Z un K -ev et

$$\underline{0}_Z : W \mapsto Z, \quad \underline{0}'_Z : V \mapsto Z, \quad \underline{0}_W : V \mapsto W, \quad \underline{0}'_W : U \mapsto W, \quad \underline{0}_V : U \mapsto V$$

les applications constantes nulles; on a pour $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$,

$$\underline{0}_Z \circ \psi = \underline{0}'_Z, \quad \psi \circ \underline{0}_V = \underline{0}_W.$$

(5) Associativité: Soit $\theta \in \text{Hom}_K(W, Z)$, $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$, $\varphi \in \text{Hom}_K(U, V)$ alors

$$(\theta \circ \psi) \circ \varphi = \theta \circ (\psi \circ \varphi) \in \text{Hom}_K(U, Z)$$

Rang d'une matrice : $\varphi: V \rightarrow W$

$$\text{rg}(\varphi) = \dim \text{Im } \varphi$$

$$= \dim \text{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

$\{e_1, \dots, e_d\} = \text{base de } V.$

si $M = \text{mat}_{B'B}(\varphi)$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{1d} \\ m_{21} & \vdots \\ \vdots & m_{dd} \\ m_{d1} & \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 7.6. Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$, le rang d'une matrice M est la dimension de l'espace engendré par les d colonnes de M dans $\text{Col}_{d'}(K)$:

$$\text{rg}(M) = \dim \text{Vect}(\{\text{Col}_j(M), j \leq d\}).$$

Autrement dit $\text{rg}(M)$ est la taille maximale d'une sous-famille libre de la famille $\{\text{Col}_j(M), j \leq d\}$ des colonnes de M .

$$\text{Si } M = \text{mat}_{B'B}(\varphi) \quad \text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi)$$

Rmq: Inégalité du rang

$$\text{rg}(\varphi) \leq \min(\dim V, \dim W)$$

$$\text{rg}(M) \leq \min(d, d')$$

Example: $\varphi(x, y, z) = (2x + 4y, y + 3z)$

$$M = \text{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cor}(K) = 2 \quad \text{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(M) = 1$$

$$\text{Cor}(K) = 3 \quad \text{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(M) = 2$$

$$\text{Si } \text{Cor}(H) \neq 2 \quad \text{vg}(M) = 2$$

Matrice de rang r (Exemple)

Thm NI: Soit $\varphi: V \rightarrow W$ $\text{rg}(\varphi) = r$
 $r \leq \min(d, d')$

Ds la preuve du Thm NI il existe
une base B de V et une base B'
de W tq

$$B = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\} \quad e_{r+i} \in \ker \varphi \quad i \geq 1$$

$$B = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\} \quad e_{r+i} \in \ker \varphi \\ i \geq 1$$

$$B' = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_d\} \text{ avec}$$

$$f_i = \varphi(e_i) \text{ pour } i = 1, \dots, r \text{ et}$$

$$f_{r+1}, \dots, f_d \text{ complète la base de } \operatorname{Im} \varphi$$

$$I_{d',d,r} = \text{mat}_{B'B}^{d'}(\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the block structure of the matrix $I_{d',d,r}$. The matrix is partitioned into four blocks. The top-left block is I_r , the top-right block is 0 , the bottom-left block is 0 , and the bottom-right block is 0 . Brackets indicate the dimensions of the blocks: the top-left block is $r \times r$, the top-right block is $r \times (d-r)$, the bottom-left block is $(d-r) \times r$, and the bottom-right block is $(d-r) \times (d-r)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the explicit form of the matrix $I_{d',d,r}$. The matrix is a 5×5 matrix with the following entries: the first two rows are $(1, 0, 0, 0, 0)$ and $(0, 1, 0, 0, 0)$; the third row is $(0, 0, 1, 0, 0)$; the fourth and fifth rows are $(0, 0, 0, 0, 0)$ and $(0, 0, 0, 0, 0)$. Brackets indicate the dimensions of the blocks: the first three rows are grouped together with a bracket labeled r , and the last two rows are grouped together with a bracket labeled d .

Transposition

DÉFINITION 7.7. La transposition est l'application des matrices $d' \times d$ vers les matrices $d \times d'$ définie par

$${}^t \bullet : M_{d' \times d}(K) \mapsto M_{d \times d'}(K)$$

$$M = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} \mapsto {}^t M = (m_{ji}^*)_{j \leq d, i \leq d'},$$

avec

$$m_{ji}^* = m_{ij}, \quad j \leq d, i \leq d'.$$

Autrement dit si

$$M = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}, \quad {}^t M = (m_{ji}^*)_{j \leq d, i \leq d'} = (m_{ij})_{j \leq d, i \leq d'}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}, \quad {}^t M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & \cdots & m_{d'1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{d'2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1d} & m_{2d} & \cdots & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^t M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME (Matrice de l'application duale). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de V et V' et

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$$

la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit

$$\text{mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*}(\varphi^*) = (m_{ji}^*)_{j \leq d, i \leq d'}$$

la matrice de φ^* dans les bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$ alors on a

$$m_{ji}^* = m_{ij}, \quad i \leq d', \quad j \leq d$$

En d'autres termes

$$\text{mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*}(\varphi^*) = {}^t \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi).$$

EXERCICE 6.6. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre deux espaces de dimensions finies.

(1) (Linearite) Montrer que l'application

$$\bullet^* : \varphi \in \text{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$$

qui a une application lineaire associe l'application lineaire duale est elle meme lineaire:

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda\varphi^* + \varphi'^*$$

En d'autres termes

$$\bullet^* \in \text{Hom}(\text{Hom}(V, W), \text{Hom}(W^*, V^*)).$$

(2) (Anti-morphisme) Soit $\psi : W \mapsto Z$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

(3) (Involutive) Montrer que si le bi-dual V^{**} est identifie (canoniquement) a V via l'isomorphisme

$$\text{eval}_\bullet : v \in V \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}$$

alors la duale de la duale qu'une application est l'application elle-meme:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

THÉORÈME 7.3. (*Propriétés fonctionnelles de la transposition*) La transposition a les propriétés suivantes:

(1) *Linearité*: ${}^t(\lambda.M + M') = \lambda {}^tM + {}^tM'.$

(2) *Involutive*: ${}^t({}^tM) = M.$

(3) *Anti-multiplicativité*: pour $M \in M_{d'',d'}(K)$, $N \in M_{d',d}(K)$, $M.N \in M_{d'',d}(K)$ et

$${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM.$$

Exo: démontrer "à la main".

Rang de la transposée

THÉORÈME 7.4 (Invariance du rang par transposition). Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ on a

$$\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M).$$

Comme la transposée d'une matrice transforme les colonnes en lignes on obtient:

COROLLAIRE 7.1. Le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace K^d engendré par les vecteurs lignes de M

$$\text{rg}(M) = \dim_K \text{Vect}(\text{Lig}_j(M), j = 1, \dots, d').$$

Preuve: Soit φ tq $\text{mat}_{B'B} \varphi = M$

et φ^* l'application dual $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$

On a mq $\text{rg}(\varphi^*) = \text{rg}(\varphi)$

Comme $\text{mat}_{B'B}(\varphi) = M$

la matrice $\text{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*) = {}^tM$

et que $\text{rg } M = \text{rg } \varphi = \text{rg } \varphi^* = \text{rg } {}^tM$



Exo: démontre $\text{rg } M = \text{rg } {}^tM$
sans les mains!

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = M \quad {}^t M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$$

— Si $\text{Cor } K = 2$

$${}^t M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } {}^t M = \text{rg } M = 1$$

— Si $\text{Cor } K \neq 2$ on voit en regardant
les

les 1^{ères} et 2^{èmes} coordonnées
que les 2 colonnes sont lin indep
 $\text{rg}^t M = 2 = \text{rg} M,$

**Mathématique
Wiskunde**
Pierre Deligne

$$|\tau(p)| \leq 2 \cdot p^{11/2}$$

0,60

BELGIQUE BELGIË

2007 Els Vandevyvere

Algebre des Matrices Carrées

Si $d = d' = d''$ la multiplication entre matrices $d \times d$ donne une loi de composition interne

$$\begin{aligned} M_d(K) \times M_d(K) &\longrightarrow M_d(K) \\ (M, N) &\longrightarrow M.N \end{aligned}$$

THÉORÈME 7.5. *L'espace $M_d(K)$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication est un anneau (non-commutatif en general) dont l'élément neutre est la matrice carrée nulle $\underline{0}_d = \underline{0}_{d \times d}$ et dont l'unité est la matrice identité Id_d . De plus la structure de K -EV de $M_d(K)$ fait de l'anneau $(M_d(K), +, \cdot)$ une K -algèbre (de dimension d^2).*

On l'appelle l'algèbre des matrices carrées de dimension d (ou de rang d) sur le corps K (ou à coefficient dans K).

Algebre des Matrices vs Algebre des Endomorphismes

$V = K\text{-ev}$ de $\dim d$

$(\text{End}(V), +, \cdot, 0, \text{Id}_V, \text{O}_V)$ est une

K -algebre.

THÉORÈME 7.6. Soit V de dimension finie d et $\mathcal{B}$ une base de V , l'application

$$\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \text{mat}_{\mathcal{B}} : \text{End}(V) \mapsto M_d(K)$$

est un isomorphisme d'anneaux (et donc de K -algèbres) pour les lois d'addition et de multiplication décrites précédemment.

THE
WARNING

la base de V comme
espace d'arrivée doit être
égale à la base de V
comme espace de départ.

Le groupe lineaire

DÉFINITION 7.8. Soit V un K -EV de dimension finie. Le groupe lineaire de V est le groupe (pour la composition dans $\text{End}(V)$) des elements inversibles de l'algebre $\text{End}_K(V)$; son element neutre est l'identite Id_V et on note ce groupe

$$\text{GL}(V) = \text{End}_K(V)^\times = \{\varphi : V \mapsto V, \varphi \text{ est bijectif}\}.$$

Soit $d \geq 1$. Le groupe lineaire de rang d sur K est le groupe des matrices carrees inversibles dans l'algebre $M_d(K)$ pour la multiplication des matrices; son element neutre est la matrice identite Id_d et on note ce groupe

$$\text{GL}_d(K) = M_d(K)^\times = \{M \in M_d(K), \exists M' \in M_d(K), M.M' = M'.M = \text{Id}_d\}.$$

PROPOSITION 7.5. L'application $\text{mat}_{\mathcal{B}} : \text{End}(V) \mapsto M_d(K)$ induit un isomorphisme de groupes

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} : \text{GL}(V) \mapsto \text{GL}_d(K)$$

et en particulier

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}.$$

Critère d'Inversibilité

THÉORÈME 7.7 (Critère d'inversibilité des endomorphismes). Soit $\varphi : V \mapsto V$ alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) φ est inversible (ie. bijective),
- (2) φ est injective,
- (3) φ est surjective,
- (4) $\text{rg}(\varphi) = d$,
- (5) φ transforme une base de V en une famille libre,
- (6) φ transforme une base de V en une famille génératrice

THÉORÈME 7.8 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les colonnes)). *Soit une matrice carree $M = (m_{ij})_{i,j \leq d} \in M_d(K)$, les conditions suivantes sont equivalentes*

- (1) M est inversible, ie. $M \in \text{GL}_d(V)$,*
- (2) $\text{rg}(M) = d$,*
- (3) $\{\text{Col}_i(M), i = 1, \dots, d\}$ forme une famille libre de $\text{Col}_d(K)$,*
- (4) $\{\text{Col}_i(M), i = 1, \dots, d\}$ forme une famille generatrice de $\text{Col}_d(K)$.*

THÉORÈME 7.9 (Critere d'inversibilite pour les matrices (via les lignes)). *Soit une matrice carree $M = (m_{ij})_{i,j \leq d} \in M_d(K)$, les conditions suivantes sont equivalentes*

- (1) M est inversible, ie. $M \in \text{GL}_d(V)$,*
- (2) tM est inversible, ie. ${}^tM \in \text{GL}_d(V)$,*
- (3) $\text{rg}({}^tM) = d$,*
- (4) $\{\text{Lig}_i(M), i = 1, \dots, d\}$ forme une famille libre de $\text{Lig}_d(K)$,*
- (5) $\{\text{Lig}_i(M), i = 1, \dots, d\}$ forme une famille generatrice de $\text{Lig}_d(K)$.*

Inversion et transposition

$$M \text{ inversible} \iff \text{rg } M = d \iff \text{rg } {}^t M = d \\ \iff {}^t M \text{ inversible}$$

Que vaut $({}^t M)^{-1}$ si M est inversible

$$({}^t M)^{-1} = {}^t (M^{-1})$$

$$\text{si on regarde } M \times M^{-1} = Id$$

$${}^t(M \times M^{-1}) = {}^t I_d = I_d$$

$$= {}^t(M^{-1}) \times {}^t M = I_d$$

$$({}^t M)^{-1} = {}^t(M^{-1}).$$

Change ment de Base

Q: $\varphi: V \rightarrow W$ et si on a des
base $B \subset V$ $B' \subset W$

$$\text{mat}_{B', B}(\varphi) \in M_{d' \times d}(K)$$

Si on prend d'autres bases $B_n \subset V$
 $B'_n \subset W$

Comment calculer

$\text{mat}_{B'_n B_n}(\varphi)$ en fct de $\text{mat}_{B'B}(\varphi)$?

THÉORÈME 7.10 (Formule de changement de base). Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_n \subset W$ des bases de V et W . On a la relation

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n}(\varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'}(\text{Id}_W) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n}(\text{Id}_V).$$

Preuve: On a la relation de composition

$$\varphi = \text{Id}_W \circ \varphi \circ \text{Id}_V$$

Rappel le lien en composition d'AL
et produit de matrices associées

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\psi} & W \\ & & \mathcal{B}'' \end{array}$$

$$\text{mat}_{B''B}(\psi \circ \varphi) = \text{mat}_{B''B'}(\psi) \times \text{mat}_{B'B}(\varphi)$$

On applique cette relation 2x

$$\varphi = \text{Id}_W \circ \varphi \circ \text{Id}_V$$

$B'_n \longleftarrow B' \longleftarrow B \longleftarrow B_n$

$$\text{mat}_{B'_n B_n} \varphi = \text{mat}_{B'_n B'} \text{Id}_W \times \text{mat}_{B'B}(\varphi) \times \text{mat}_{B B_n}(\text{Id}_V)$$

DÉFINITION 7.9. La matrice carree de taille $d = \dim V$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n} := \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n}(\text{Id}_V)$$

est appelle matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}_n$ ou encore la matrice de passage de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_n$.

Sa j -ieme colonne est formee par les coordonnees du j -ieme vecteur $\mathbf{e}_{nj}$ exprime comme combinaison lineaire dans la base $\mathcal{B}$. La formule de changement de base se reecrit alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n}(\varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'} . \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) . \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n} .$$

PROPOSITION 7.7. Soit trois bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset V$ on a

(1) Formule d'inversion:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \text{Id}_d.$$

En particulier une matrice de passage est inversible (dans $M_d(K)$) et son inverse est la matrice de passage de la base initiale a la nouvelle base:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}.$$

(2) Formule de transitivite:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2} = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$$

Preuve : regle de composition de ALs
et de leurs matrices dans des Bases donnees
applique a $\varphi = \psi = \text{Id}_V$ $\psi \circ \varphi = \text{Id}_V$

Cas des Endomorphismes

Si $V = W$ souvent on prend $B' = B \subset V$
 $B'_n = B_n \subset V$

alors si on note

$$\text{mat}_B(\varphi) = \text{mat}_{BB}(\varphi)$$

$$\text{mat}_{B_n}(\varphi) = \text{mat}_{B_n B_n}(\varphi)$$

La formule de changement de base
s'écrit

$$\begin{aligned}\text{mat}_{B_n}(\varphi) &= \text{mat}_{B_n B}^{-1} \times \text{mat}_B(\varphi) \times \text{mat}_{B B_n} \\ &= (\text{mat}_{B B_n})^T \times \text{mat}_B(\varphi) \times \text{mat}_{B B_n}\end{aligned}$$

Exemple : $V = K^2$ $B = \{(1,0), (0,1)\}$

$$B_n = \{(1,3), (1,2)\}$$

B_n est une base car B_n est libre et a 2 vts

B_n est libre car les 2 vecteurs ne sont jamais proportionnels l'un à l'autre

$$\text{mat}_{B B_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

contient les coordonnées de
 $\text{mat}_{B_n B} = (1,0)$ et $(0,1)$ exprimé comme
CL de $(1,3)$ et $(1,2)$

$$2(1,3) - 3(1,2) = (-1,0) = -(1,0)$$

$$(1,0) = -2(1,3) + 3(1,2)$$

$$(1,3) - (1,2) = (0,1)$$

$$\text{mat}_{B_n B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Equivalentes
/ Similares

Changement de base (Rappel)

$$V \supset B B_n \quad W \supset B' B'_n$$

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

$$M_n = \text{mat}_{B'_n B_n}(\varphi) \quad M = \text{mat}_{B' B}(\varphi)$$

on a

$$M_n = \underset{\substack{\uparrow \\ GL_{d'}(K)}}{\text{mat}_{B'_n B'}} M \times \underset{\substack{\uparrow \\ GL_d(K)}}{\text{mat}_{B B_n}}$$

$$M_n = A M B$$

$$A \in GL_{d'}(K) \quad B \in GL_d(K)$$

DÉFINITION 7.10. Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont dites équivalentes si il existe des matrices inversibles $A \in \text{GL}_{d'}(K)$, $B \in \text{GL}_d(K)$ telles que

$$N = A.M.B.$$

Par la formule de changement de bases on a:

PROPOSITION 7.8. Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont équivalentes ssi il existe V de dimension d et W de dimension d' , des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_n \subset W$ et une application linéaire $\varphi : V \mapsto W$ telle que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi), \quad N = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n\mathcal{B}_n}(\varphi)$$

PROPOSITION. La relation "être équivalente" est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique, transitive) sur $M_{d' \times d}(K)$.

Preuve: $M \sim M \quad M = I_{d'} \times M \times I_d$

— si $M \sim N \Leftrightarrow N = \underset{\times A^{-1}}{A} M \underset{\times B^{-1}}{B}$

$$\Rightarrow A^{-1} N B^{-1} = M$$

— $M \sim N$ et $N \sim P$

$$P = A N B \quad N = A' M B'$$

$$P = A A' M B' B \Rightarrow M \sim P$$

THÉORÈME 7.11. Soient $M, N \in M_{d' \times d}(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) M et N sont équivalentes,
- (2) $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$,
- (3) M et N sont équivalentes à $I_{d' \times d}(r)$.

Preuve :

$$I_{d' \times d, r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d' d

Preuve: Si M et N sont équivalentes
alors elles représentent la même AL ϕ
ds des Bases possiblement différentes
leur rang vaut $\text{rg}(\phi)$.

- Réciproquement si M et N ont même rang
elles représentent des AL ϕ, ϕ'
de même rang.

la preuve du thm NI dit que
il existe des bases tq les matrices de
 ϕ et ϕ' ds ces bases sont

$$I_{d' \times d, r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow M \sim I_{d' \times d, r} \sim N.$$

Il y a donc

$\min(d, d') + 1$ Classes d'équivalences
ds $M_{d' \times d}(K)$.

Matrices Similaires

$$\varphi: V \rightarrow V \quad B, B_n \subset V$$

$$\text{mat}_{B_n} \varphi = \left(\underset{\uparrow}{\text{mat}_{BB_n}} \right)^{-1} \times \underset{\uparrow}{\text{mat}_B \varphi} \times \underset{\uparrow}{\text{mat}_{BB_n}}$$

$GL_d(K) \qquad \qquad GL_d(K)$

$$M_n = C M C^{-1} \quad \text{avec } C = \left(\text{mat}_{BB_n} \right)^{-1}$$

DÉFINITION 7.11. On dit que deux matrices M, N sont semblables ou conjuguées si il existe $C \in GL_d(K)$ tel que

$$N = C.M.C^{-1}.$$

La relation "être semblables" ou "être conjuguées" est une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence pour cette relation, l'ensemble des matrices de la forme

$$M^{\natural} := \text{Ad}(GL_d(K))(M) = \{C.M.C^{-1}, C \in GL_d(K)\}$$

est appelée classe de conjugaison (de M) et on note

$$M_d(K)^{\natural} = \{M^{\natural}\} = M_d(K) / \sim$$

l'ensemble des classes de conjugaison.

Rmq: si M et N sont semblables alors
 M et N sont équivalentes ($A = C B C^{-1}$)
en particulier M et N ont même rang
Mais des matrices de même rang ne sont
pas toujours semblables.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M et N sont equiv mais pas semblables

$$CMC^{-1} = CI_2C^{-1} = CC^{-1} = I_2$$

$$I_2 \notin \{I_2\} \text{ et } N \notin \{I_2\}$$

PROPOSITION 7.9. Deux matrices $M, N \in \text{GL}_d(K)$ sont semblables ssi M et N sont les matrices d'un meme endomorphisme dans des bases convenables: il existe un espace vectoriel de dimension d , V , deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et une application lineaire $\varphi : V \mapsto V$ telle que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi), \quad N = \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi).$$

Rmq:

Action par Conjugaison

DÉFINITION 7.12. Soit $C \in GL_d(K)$ une matrice inversible. Note note $\text{Ad}(C)$ l'application dite de conjugaison par C :

$$\text{Ad}(C) : \begin{array}{ccc} M_d(K) & \mapsto & M_d(K) \\ M & \mapsto & C.M.C^{-1}. \end{array}$$

Exemple: si $M = \text{mat}_B \varphi$

$$M' = \text{mat}_{B_n} \varphi$$

$$M' = \text{Ad}(C)(M) = CMC^{-1}$$

$$C = \text{mat}_{B_n} B = (\text{mat}_{B B_n})^{-1}$$

PROPOSITION 7.10. La conjugaison $\text{Ad}(C)$ est un automorphisme de l'algèbre $M_d(K)$:

(1) *Linearité*: On a $\text{Ad}(C)(\lambda.M + N) = \lambda\text{Ad}(C)(M) + \text{Ad}(C)(N)$.

(2) *Multiplicativité*: $\text{Ad}(C)(M.N) = \text{Ad}(C)(M).\text{Ad}(C)(N)$.

(3) *Inversibilité*: $\text{Ad}(C)$ est bijective et $\text{Ad}(C)^{-1} = \text{Ad}(C^{-1})$.

Preuve : $C(\lambda M + N)C^{-1}$

$$= (\lambda CM + CN)C^{-1} = \lambda CMC^{-1} + CNC^{-1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad CMC^{-1} &= CM C^{-1} C NC^{-1} \\ &= CMC^{-1} \times CNC^{-1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Ad}(C)(M) = CMC^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Ad}(C^{-1})(\text{Ad}(C)M) \\
 &= C^{-1}(CMC^{-1})(C^{-1})^{-1} \\
 &= C^{-1}CMC^{-1}C = M
 \end{aligned}$$

$$\text{Ad}(C^{-1}) \circ \text{Ad}(C) = \text{Id}_{M_d(K)}$$

$$\text{Ad}(C) \circ \text{Ad}(C^{-1}) = \text{Id}_{M_d(K)}$$

Action adjointe

PROPOSITION 7.11. *On dispose donc d'une application*

$$\mathrm{Ad}(\bullet) : C \in \mathrm{GL}_d(K) \mapsto \mathrm{Ad}(C) \in \mathrm{Aut}(M_d(K)) \simeq \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

appelée application adjointe.

L'application adjointe $\mathrm{Ad}(\bullet)$ est un morphisme de groupes et définit donc une action à gauche $\mathrm{GL}_d(K) \curvearrowright M_d(K)$. Son noyau est formé par les matrices scalaires:

$$\ker \mathrm{Ad} = K^\times \mathrm{Id}.$$

Preuve: